

Production of locomotive rosters for a multi-class multi-locomotive problem

Fabian Zurbuchen, Andreas Syz
OR-Seminar, 16. Januar 2003

Source: Journal of Operations Research, (2001) 52, 1191-1200
Article by DH Noble, M Al-Amin and RGJ Mills

Inhalt

- Problembeschrieb
- Literatur Review
- Formulierung des PTC Problems
- Erste Analyse
- Neuformulierung der Bedingungen
- Exakte Berechnung der Kosten-Koeffizienten
- Schlusswort

Problembeschrieb

Multi-class multi-locomotive Problem

Zuordnung einer bestimmten Anzahl Lokomotiven verschiedener Klassen (multi-class) zu verschiedenen *long-trip Services*, wobei es möglich ist, den einzelnen Services auch mehrere Lokomotiven (multi-locomotive) zuzuordnen. Gleichzeitig sollen dabei die Kosten minimiert werden.

Gezeigt am Beispiel der *Public Transport Corporation (PTC)* des australischen Staates Victoria mit folgenden Ausgangsdaten:

- 59 Lokomotiven
- 8 Klassen von Lokomotiven
- 26 long-trip Services

Table 1 The number, age and power of locomotives available to pull long-trip trains

| <i>Class</i> | <i>Number available</i> | <i>Age (y)</i> | <i>Power (kW)</i> |
|--------------|-------------------------|----------------|-------------------|
| A | 1 | 9 | 1680 |
| G | 6 | 6 | 2240 |
| H | 5 | 25 | 710 |
| N | 2 | 7 | 1680 |
| P | 1 | 9 | 710 |
| S | 6 | 34 | 1340 |
| T | 14 | 28 | 710 |
| X | 24 | 22 | 1490 |

Table 2 Schedule of long-trip freight train services

| No. | Destinations | One way distance (km) | No. of round-trips | Journey days | Outward journey | | Return journey | |
|-----|--------------|-----------------------|--------------------|--------------------------|-----------------|-----------|----------------|-----------|
| | | | | | Dep. time | Arr. time | Dep. time | Arr. time |
| 1 | MEL-SWH | 345 | 2 | M-W,W-F | 2110 | 0535 | 1450 | 0210 |
| 2 | MEL-DQN | 325 | 3 | Su-Tu,Tu-Th,Th-Sa | 2105 | 1005 | 1450 | 0120 |
| 3 | MEL-MIL | 572 | 3 | M-W,W-F,F-M | 1815 | 0640 | 1600 | 0205 |
| 4 | MEL-SHP | 182 | 5 | M,Tu,W,Th,F | 0110 | 0515 | 1055 | 2300 |
| 5 | MEL-DND | 30 | 5 | M,Tu,W,Th,F | 0845 | 1002 | 1350 | 1605 |
| 6 | MEL-LGA | 127 | 5 | M,Tu,W,Th,F | 1200 | 1440 | 1520 | 1829 |
| 7 | MEL-SHP | 182 | 5 | M-Tu,Tu-W,W-Th,Th-F,F-Sa | 2015 | 0515 | 1135 | 1555 |
| 8 | MEL-WAR | 267 | 3 | Su-Tu,Tu-Th,Th-Sa | 2245 | 0510 | 2305 | 0625 |
| 9 | GEL-MEL | 70 | 4 | Tu-W,W-Th,Th-F,F-Sa | 1700 | 0005 | 0115 | 0640 |
| 10 | GEL-MEL | 70 | 3 | M,W,F | 0320 | 0715 | 1925 | 2105 |
| 11 | GEL-PIN | 535 | 3 | M-Tu,W-Th,F-Sa | 0530 | 1955 | 2055 | 1115 |
| 12 | GEL-ALB | 376 | 2 | M-W,W-F | 2015 | 0405 | 1715 | 0040 |
| 13 | GEL-LND | 132 | 3 | M,W,F | 1710 | 2045 | 2100 | 2320 |
| 14 | TRA-MEL | 158 | 4 | M,Tu,W,Th | 0130 | 0610 | 1205 | 1625 |
| 15 | TRA-MEL | 158 | 2 | M-W,W-M | 2000 | 0305 | 2300 | 0410 |
| 16 | TRA-MEL | 158 | 2 | M-W,W-F | 1840 | 0105 | 1935 | 0035 |
| 17 | BEN-MEL | 162 | 2 | Tu,F | 0720 | 1015 | 1355 | 1715 |
| 18 | MGB-MEL | 470 | 3 | M-W,W-F,F-M | 1745 | 0640 | 2030 | 0810 |
| 19 | MIL-MEL | 572 | 3 | M-W,W-F,F-M | 1030 | 0250 | 2348 | 0810 |
| 20 | MIL-GEL | 501 | 2 | M-Tu,W-Th | 1905 | 0510 | 1205 | 2310 |
| 21 | DIM-GEL | 292 | 2 | Tu-W,Th-F | 1400 | 0100 | 1143 | 1940 |
| 22 | ALB-LND | 368 | 2 | Tu-Th,Th-M | 1840 | 0450 | 1505 | 0155 |
| 23 | LND-MEL | 62 | 6 | M,Tu,W,Th,F,Sa | 0710 | 1010 | 1040 | 1255 |
| 24 | LND-MEL | 62 | 6 | M,Tu,W,Th,F,Sa | 0215 | 0440 | 1445 | 1720 |
| 25 | DND-SEY | 129 | 5 | M,Tu,W,Th,F | 0855 | 1150 | 1325 | 1500 |
| 26 | DND-SEY | 129 | 5 | Su-M,M-Tu,Tu-W,W-Th,Th-F | 2230 | 0005 | 0215 | 0545 |

ALB Albury, BEN Bendigo, DIM Dimboola, DND Dandenong, DQN Deniliquin, GEL Geelong, LGA Leongatha, LND Long Island, MEL Melbourne, MGB Mt. Gambier, MIL Mildura, PIN Pinaroo, SEY Seymour, SHP Shepparton, SWH Swan Hill, TRA Traralgon, WAR Warrnambool.

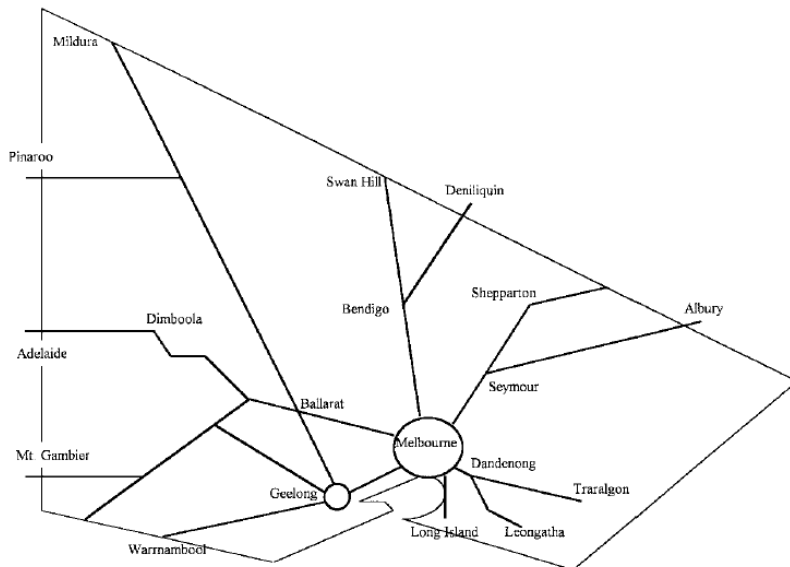


Figure 1 PTC Victoria Freight Train Network, 1991.

Table 3 The load transported and the maximum loads (ML_{y1}) for the outward journey

| Service no. | Maximum load (t) for each locomotive class | | | | | | | | Load (t) |
|-------------|--|------|------|------|------|------|------|------|----------|
| | A | G | H | N | P | S | T | X | |
| 1 | 770 | 1400 | 560 | 1050 | 500 | 860 | 500 | 860 | 1200 |
| 2 | 770 | 1400 | 560 | 1050 | 500 | 860 | 500 | 860 | 900 |
| 3 | 660 | 1390 | 405 | 790 | 405 | 790 | 405 | 790 | 1200 |
| 4 | 820 | 1600 | 405 | 970 | 405 | 865 | 405 | 865 | 1600 |
| 5 | 990 | 1600 | 590 | 1140 | 590 | 1040 | 590 | 1040 | 600 |
| 6 | 1200 | 1680 | 390 | 1250 | 390 | 1140 | 390 | 1140 | 250 |
| 7 | 820 | 1600 | 405 | 970 | 405 | 865 | 405 | 865 | 600 |
| 8 | 760 | 1600 | 510 | 915 | 510 | 915 | 510 | 915 | 1200 |
| 9 | 1830 | 2540 | 1220 | 1830 | 1220 | 1830 | 1220 | 1830 | 1260 |
| 10 | 1830 | 2540 | 1220 | 1830 | 1220 | 1830 | 1220 | 1830 | 1000 |
| 11 | 750 | 1520 | 560 | 1030 | 480 | 815 | 480 | 815 | 1000 |
| 12 | 820 | 1600 | 455 | 970 | 405 | 865 | 405 | 865 | 1400 |
| 13 | 900 | 1690 | 540 | 1050 | 540 | 970 | 540 | 970 | 830 |
| 14 | 770 | 1360 | 450 | 960 | 450 | 800 | 450 | 800 | 550 |
| 15 | 770 | 1360 | 450 | 960 | 450 | 800 | 450 | 800 | 950 |
| 16 | 770 | 1360 | 450 | 960 | 450 | 800 | 450 | 800 | 1000 |
| 17 | 890 | 1700 | 640 | 1090 | 520 | 890 | 520 | 890 | 300 |
| 18 | 710 | 1350 | 510 | 915 | 510 | 900 | 510 | 900 | 1250 |
| 19 | 710 | 1450 | 455 | 865 | 455 | 865 | 455 | 865 | 1100 |
| 20 | 760 | 1520 | 455 | 865 | 455 | 865 | 455 | 865 | 500 |
| 21 | 760 | 1450 | 455 | 865 | 455 | 865 | 455 | 865 | 400 |
| 22 | 900 | 1490 | 480 | 1015 | 480 | 970 | 480 | 970 | 3000 |
| 23 | 850 | 1690 | 540 | 1050 | 540 | 970 | 540 | 970 | 1600 |
| 24 | 850 | 1690 | 540 | 1050 | 540 | 970 | 540 | 970 | 2600 |
| 25 | 820 | 1600 | 405 | 970 | 405 | 865 | 405 | 865 | 600 |
| 26 | 820 | 1600 | 405 | 970 | 405 | 865 | 405 | 865 | 600 |

Table 4 The load transported and the maximum loads (ML_{y2}) for the return journey

| Service no. | Maximum load (t) for each locomotive class | | | | | | | | Load (t) |
|-------------|--|------|------|------|------|------|------|------|----------|
| | A | G | H | N | P | S | T | X | |
| 1 | 800 | 1700 | 560 | 1050 | 500 | 860 | 500 | 860 | 1000 |
| 2 | 770 | 1700 | 560 | 1090 | 500 | 860 | 500 | 860 | 1700 |
| 3 | 710 | 1450 | 455 | 865 | 455 | 865 | 455 | 865 | 900 |
| 4 | 915 | 1490 | 480 | 1015 | 480 | 1015 | 480 | 1015 | 1100 |
| 5 | 1220 | 2180 | 770 | 1370 | 770 | 1240 | 770 | 1240 | 700 |
| 6 | 1220 | 2180 | 390 | 1370 | 390 | 1240 | 390 | 1240 | 900 |
| 7 | 915 | 1490 | 480 | 1015 | 480 | 1015 | 480 | 1015 | 1500 |
| 8 | 760 | 2540 | 510 | 915 | 510 | 915 | 510 | 915 | 1200 |
| 9 | 1625 | 2790 | 1220 | 1830 | 1220 | 1830 | 1220 | 1830 | 500 |
| 10 | 1625 | 2790 | 1220 | 1830 | 1220 | 1830 | 1220 | 1830 | 400 |
| 11 | 760 | 1520 | 455 | 865 | 455 | 865 | 455 | 865 | 1300 |
| 12 | 915 | 1490 | 480 | 1015 | 480 | 1015 | 480 | 1015 | 600 |
| 13 | 850 | 1690 | 540 | 1050 | 540 | 970 | 540 | 970 | 280 |
| 14 | 770 | 1270 | 490 | 1030 | 490 | 900 | 490 | 900 | 1500 |
| 15 | 770 | 1270 | 490 | 1030 | 490 | 800 | 490 | 800 | 750 |
| 16 | 770 | 1270 | 490 | 1030 | 490 | 800 | 490 | 800 | 1000 |
| 17 | 770 | 1400 | 560 | 1050 | 500 | 860 | 500 | 860 | 300 |
| 18 | 860 | 1640 | 600 | 1170 | 540 | 940 | 540 | 940 | 550 |
| 19 | 660 | 1390 | 405 | 790 | 405 | 790 | 405 | 790 | 350 |
| 20 | 750 | 1520 | 560 | 1030 | 480 | 815 | 480 | 815 | 1000 |
| 21 | 985 | 1390 | 510 | 915 | 510 | 915 | 510 | 915 | 1000 |
| 22 | 820 | 1600 | 455 | 970 | 405 | 865 | 405 | 865 | 880 |
| 23 | 900 | 1690 | 540 | 1050 | 540 | 970 | 540 | 970 | 450 |
| 24 | 900 | 1690 | 540 | 1050 | 540 | 970 | 540 | 970 | 1500 |
| 25 | 915 | 1490 | 480 | 1015 | 480 | 1015 | 480 | 1015 | 1600 |
| 26 | 915 | 1490 | 480 | 1015 | 480 | 1015 | 480 | 1015 | 1600 |

Literatur Review

Multi-class single-locomotive Probleme:

- Forbes MA, Holt JN and Watts AM (1991). Exact solution of locomotive scheduling problems. *J Opl Res Soc* 42: 825–831.
- Wright MB (1989). Applying stochastic Algorithms to a locomotive scheduling problem. *J Opl Res Soc* 40: 187–192.
- Booler JMP (1995). A note on the use of Lagrangean relaxation in railway scheduling. *J Opl Res Soc* 46: 123–127.
- Booler JMP (1980). The solution of a railway locomotive scheduling problem. *J Opl Res Soc* 31: 943–948.
- Al-Amin M, Forbes MA and Noble DH (1999). Production of locomotive rosters for a multi-class single-locomotive problem. *Opl Res Soc* 50: 1004–1010.

Multi-class multi-locomotive Probleme:

- Ford LR and Fulkerson DR (1962). *Flows in Networks*. Princeton UP: Princeton.
- Nou A, Desrosiers J and Soumis F (1997). Weekly locomotive scheduling at Swedish State Railways. Technical Report G-97-35, GERAD, cole des Hautes tudes Commerciales de Montre´al, Canada.

Formulierung des PTC Problems

Der geschilderte Sachverhalt ist ein reines Integer-Problem und führt auf folgende Zielfunktion:

$$\min_i \sum_j C_{ij} X_{ij} \quad (1)$$

$$\text{subject to} \quad \sum_i M L_{i,j1} X_{ij} \geq L_{j1} \quad (2)$$

$$\sum_i M L_{i,j2} X_{ij} \geq L_{j2} \quad (3)$$

$$\sum_j X_{ij1} \leq N_i \quad (4)$$

Die Variablen des Optimierungsproblem

C_{ij} = wöchentliche Kosten für das Zuteilen einer Lokomotive der Klasse i zu Service j

X_{ij} = Anzahl der Lokomotiven der Klasse i , zugeteilt zum Service j

ML_{j1} = maximale Zuladung (in t) während des Service j der Lokomotive der Klasse i (Hinfahrt)

ML_{j2} = maximale Zuladung (in t) während des Service j der Lokomotive der Klasse i (Rückfahrt)

L_{j1} = Gewicht des hinfahrenden Zuges des Service j

L_{j2} = Gewicht des rückfahrenden Zuges des Service j

N_i = Anzahl verfügbarer Lokomotiven der Klasse i

Die Bestimmung der Kosten-Koeffizienten, C_{ij} , in der Zielfunktion ist nicht ganz offensichtlich. Die PTC hat die Kosten für eine Lokomotive wie folgt abgeschätzt:

$$C_{ij} = d_j[2MC_i + 0.001FC_i(L_{j1} + L_{j2})] \quad (5)$$

wobei,

d_j = total zurückgelegte Einweg-Distanz des Service j pro week (km)

MC_i = Unterhaltskosten (\$/km) der Lokomotivenklasse i und abhängig vom Alter der Lokomotive = $0.2857 + 0.0357 \text{ Age}_i$

FC_i = Treibstoffkosten (\$/1000t/km) für Lokomotiven der Klasse i und abhängig vom Alter der Lokomotive = $1.7858 + 0.0357 \text{ Age}_i$

Age_i = Alter (y) der Lokomotive der Klasse i

- Wenn jedoch zwei oder mehr Lokomotiven auf einer Strecke eingesetzt werden, muss jeweils nicht die maximal mögliche Leistung erbracht werden, so dass die Kosten für den Treibstoff davon abhängen werden, wie stark die jeweilige Lokomotive zur Erbringung der Leistung beiträgt. Dies hängt wiederum davon ab welche Lokomotiven zu welchen Strecken zugeteilt sind.
- Dies wird mit dem Term $ML_{ij1} / \sum_i ML_{ij1} X_{ij}$ abgeschätzt. Allerdings impliziert dies keine lineare Zielfunktion mehr und würde das Optimierungsproblem stark verkomplizieren. Um das zu vermeiden, wurde vorerst eine weitere Abschätzung der Treibstoffkosten im Kostenterm, C_{ij} , vorgenommen (Resultat siehe nächste Folie).
- Motiviert durch die Tatsache, dass eine Richtung der Strecke die Anzahl benötigter Lokomotiven bestimmt, wird wurde ein *sog. load factor* für die Lokomotiven des Typs i auf dem Service j berechnet.

$$LF_{ij} = \min \left\{ \frac{ML_{ij1}}{L_{j1}}, \frac{ML_{ij2}}{L_{j2}} \right\}$$

- Werden die benötigten LF_{ij} für einen bestimmten Service addiert, so ergibt dies meistens eine Summe grösser als 1 und überschätzt daher die tatsächlichen Kosten.
- Nach der Kombination verschiedener Typen von Lokomotiven wurden folgende *Rounded Load Factors* errechnet:

$$\begin{aligned} RLF_{ij} &= 0.3 && \text{if } LF_{ij} < 0.4 && \text{for all } i \text{ and } j \\ &= 0.4 && \text{if } 0.4 \leq LF_{ij} < 0.6 && \text{for all } i \text{ and } j \\ &= 0.6 && \text{if } 0.6 \leq LF_{ij} < 1.0 && \text{for all } i \text{ and } j \\ &= 1.0 && \text{if } LF_{ij} \geq 1 && \text{for all } i \text{ and } j \end{aligned}$$

- Diese RLF_{ij} berichtigten die Abschätzung der fuel costs und C_{ij} , wird zu

$$0.001FC_i RLF_{ij}(L_{j1} + L_{j2})$$

- Der Gebrauch dieser Rounded Load Factor war notwendig, um die Zielfunktion in eine lineare Form überzuführen. Dies Berechnung der Fuel Costs war zwar immer noch nicht exakt, aber besser und als die erste Approximation akzeptabel.

Erste Analyse

Das Problem wurde zuerst mit GAMS (General Algebraic Modeling System) analysiert. Die 208 Integer Variablen (26 Services und 8 Klassen von Lokomotiven) sowie 60 Bedingungen (2 x 26 load constraints und 8 supply constraints). Allerdings resultierte daraus keine optimale Lösung!

Die beste Lösung benötigte 45 Lokomotiven und ergab einen Zielfunktionswert von 151,169. Die sog. *optimality gap* betrug im besten Fall 29.64 %. Im folgenden wurden mehrere Veränderungen vorgenommen, um diese Lücke zu verringern:

Massnahmen

- (i) Die maximale Anzahl *round-trips* wurde auf 4 festgesetzt
- (ii) Die obere Grenze für die individuelle, maximale Anzahl von *einsetzbaren Lokomotiven* X_{ij} , wurde durch nachfolgenden Ausdruck bestimmt

$$X_{ij} \leq \max \left(\left\lfloor \frac{L_{j1} - 1}{ML_{ij1}} \right\rfloor + 1, \left\lfloor \frac{L_{j2} - 1}{ML_{ij2}} \right\rfloor + 1 \right)$$

for all i and j

- (iii) Die 52 *outward and return load constraints* wurden verschärft:

$$\sum_{i=1}^I \min(ML_{ij1}, L_{j1}) X_{ij} \geq L_{j1} \quad \text{for all } j$$

$$\sum_{i=1}^I \min(ML_{ij2}, L_{j2}) X_{ij} \geq L_{j2} \quad \text{for all } j$$

- (iv) Aufgrund *redunder load constraints* konnte das Problem auf noch 34 constraints reduziert werden (26 load und 8 supply)
- (v) Die Analyse dieser neuen constraints ergab, dass die *RHS* für weitere 5 Services aufgegeben werden kann

Resultat dieser Modifikationen

(i) produzierte eine verbesserte Interger-lösung, die 43 Lokomotiven benötigte und einen Zielfunktionswert von 149,852 lieferte; die optimality gap belief sich aber immer noch auf 28.5 %. (ii) ergab keine weitere Verbesserung mehr; ebenso (iii) – (v)

Nachfolgend sind Modifikationen und deren Auswirkungen auf die Werte zusammengefasst:

Table 5 Cumulative effect of various tactics on the optimality gap

| <i>Tactic</i> | <i>Relaxed optimum</i> | <i>Best lower bound</i> | <i>Best integer solution so far</i> | <i>Optimality gap (%)</i> |
|--|------------------------|-------------------------|-------------------------------------|---------------------------|
| Initial formulation | 108 896 | 116 611 | 151 169 | 29.64 |
| Upper limit of 4 locomotives per service | 108 896 | 116 611 | 149 852 | 28.50 |
| Upper bounds for the individual X_{ij} | 108 896 | 116 611 | 149 852 | 28.50 |
| 52 load constraints tightened | 118 039 | 119 824 | 149 852 | 25.06 |
| 52 load constraints reduced to 26 | 118 039 | 119 928 | 149 852 | 24.95 |
| RHS of 5 load constraints raised | 121 740 | 123 576 | 149 852 | 21.26 |

Neuformulierung der Bedingungen (beispielhaft für $j = 26$)

Die optimale Lösung wurde schliesslich mit einer neuen Methode, dem sog. *special ordered set of type 1 (SOS1)*, gefunden. Vertiefte Analysen der maximalen Güterladungen jeder einzelnen Lokomotive für Strecke 26 ergaben, dass es mehrere Möglichkeiten gibt, das zu befördernde Gütergewicht von 1,600 t zu erreichen. Jedoch nur deren sechs mit sog. *minimal covers*:

Table 6 Possible minimal covers for service 26

| <i>Minimal cover</i> | <i>Binary variable</i> | <i>No. of locomotives by class</i> | | | |
|----------------------|------------------------|------------------------------------|-------------------------|--------------------|--|
| | | <i>G</i> | <i>A or N or S or X</i> | <i>H or P or T</i> | |
| 1 | δ_1 | 2 | 0 | 0 | |
| 2 | δ_2 | 1 | 1 | 0 | |
| 3 | δ_3 | 1 | 0 | 1 | |
| 4 | δ_4 | 0 | 2 | 0 | |
| 5 | δ_5 | 0 | 1 | 2 | |
| 6 | δ_6 | 0 | 0 | 4 | |

- Jedem *covering* wurde eine binäre Variable zugeteilt. Für den Service 26 sind dies sechs Variablen und formulieren das SOS1.
- Die SOS1 Bedingung ergibt sich dann zu:

$$\sum_{k=1}^6 \delta_k = 1$$

- Die notwendigen constraints zur Quantifizierung der Anzahl der Lokomotiven ergeben sich zu:

$$\begin{aligned} X_{G,26} &= 2\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 \\ X_{A,26} + X_{N,26} + X_{S,26} + X_{X,26} &= \delta_2 + 2\delta_4 + \delta_5 \\ X_{H,26} + X_{P,26} + X_{T,26} &= \delta_3 + 2\delta_5 + 4\delta_6 \end{aligned}$$

- Durch diese Neuformulierung der constraints wurde aus dem ursprünglichen Problem, welches die Anzahl benötigter Lokomotiven quantifizierte, ein Problem, das eine *Permutation* der Lokomotiven vorsieht.
- Es gibt einzelnen Services (z.B. 10 und 17), die mit einer Lokomotive gezogen werden können (irgendeines Typs), so dass diese ohne binäre Variablen modelliert werden können:

$$\sum_i X_{ij} = 1 \quad \text{for } j = 10 \text{ and } 17$$

- Die totale Anzahl an binären Variablen beläuft sich auf 135.
- Zusätzlich wurden 77 constraints benötigt, um die X_{ij} im Abhängigkeit der binären Variablen auszudrücken. Auch die 8 supply constraints wurden ebenfalls noch benötigt.
- Dies Lösung des Problems führt auf einen Wert der Zielfunktion von 140,395 und erforderte **42 Lokomotiven**.

Exakte Wiedergabe der Kosten-Koeffizienten, C_{ij}

- Aufgrund dieser optimalen Lösung ist es möglich, den *Grad an Ungenauigkeit*, hervorgerufen durch die Linearisierung der Zielfunktion mittels Rounded Load Factors, RFL_{ij} , zu bestimmen und daraus die fuel costs innerhalb des Term C_{ij} approximieren.
- Falls nur eine Lokomotive der Klasse i für den Service j eingesetzt wird, ist Gleichung (5) weiterhin eine gute Darstellung. Jedoch werden nur auf 12 der 26 Services Güterzüge mit nur einer Lokomotive gezogen.
- Die Ungenauigkeit für Güterzüge, die von mehr als einer Lokomotive gezogen werden, rührt daher, dass (5) annimmt, dass jede einzelne Lokomotive die maximale Güterladung ziehen muss. Um die wahren Kosten eines Services j zu berechnen (falls mehr als eine Lokomotive eingesetzt wird), berechnen wir erst die Summe der totalen Zugkraft als $Pull_j = \sum_i ML_{ij} X_{ij}$ und schätzen den Anteil, der von einer einzigen Lokomotive vom Typ i gezogen wird ab, als

$$Prop_{ij} = ML_{ij} / Pull_j$$

- Auf Basis dieser Gleichung ergeben sich die Kosten für eine Lokomotive i auf Service j zu $C'_{ij} = d_j [2MC_i + 0.001 FC_i Prop_{ij}(L_{j1} + L_{j2})]$
- Die daraus resultierende Zielfunktion kann jedoch nicht als $\sum_i C'_{ij} X_{ij}$ geschrieben werden, da diese eine nicht-lineare Form annimmt. Zusätzlich können die X_{ij} nicht durch die Mengen binärer Variablen ersetzt werden, da diese keine genaue Wiedergabe der Kostenkoeffizienten erlauben.
- Z.B. ist bekannt, dass für Service 26 zwei Lokomotiven erforderlich sind, eine G-class und eine aus der A-, N- S- oder X-Klasse. Somit hängen die wahren Kosten von den verwendeten Lokomotiven ab.
- Um eine genaue und lineare Repräsentation der Zielfunktion zu erhalten, ist es notwendig, die Anzahl Lokomotiven jedes Typ explizit durch die verwendeten binären Variablen zu quantifizieren. Diese Erweiterung ist kann wie folg dargestellt werden (vgl. *Tabelle 7*).

Table 7 All possible minimal covers for service 26

| Loco combination k | No. of locomotives of class i , $Num_{i,26,k}$ | | | | | | | Total used | | |
|----------------------|---|---|---|---|---|---|---|------------|---|---|
| | G | N | S | X | A | H | P | | T | |
| 1 | | 2 | | | | | | 2 | | |
| 2 | | 1 | 1 | | | | | 2 | | |
| 3 | | 1 | | 1 | | | | 2 | | |
| 4 | | 1 | | | 1 | | | 2 | | |
| 5 | | 1 | | | | 1 | | 2 | | |
| 6 | | 1 | | | | | 1 | 2 | | |
| 7 | | 1 | | | | | | 1 | 2 | |
| 8 | | 1 | | | | | | | 1 | 2 |
| 9 | | | 2 | | | | | | | 2 |
| 10 | | | 1 | 1 | | | | | | 2 |
| 11 | | | 1 | | 1 | | | | | 2 |
| 12 | | | 1 | | | 1 | | | | 2 |
| 13 | | | 1 | | | | 2 | | | 3 |
| 14 | | | 1 | | | 1 | 1 | | | 3 |
| 15 | | | 1 | | | | 1 | 1 | | 3 |
| 16 | | | 1 | | | | 1 | 1 | 1 | 3 |
| 17 | | | 1 | | | | | | 2 | 3 |
| 18 | | | | 2 | | | | | | 2 |
| 19 | | | | 1 | 1 | | | | | 2 |
| 20 | | | | 1 | | 1 | | | | 2 |
| 21 | | | | 1 | | | 2 | | | 3 |
| 22 | | | | 1 | | 1 | 1 | | | 3 |
| 23 | | | | 1 | | 1 | | 1 | | 3 |

Table 7 All possible minimal covers for service 26

| Loco combination k | No. of locomotives of class i , $Num_{i,26,k}$ | | | | | | | Total used | | | |
|----------------------|---|---|---|---|---|---|---|------------|---|---|---|
| | G | N | S | X | A | H | P | | T | | |
| 24 | | | | 1 | | | | 1 | 1 | 3 | |
| 25 | | | | 1 | | | | | 2 | 3 | |
| 26 | | | | | 2 | | | | | 2 | |
| 27 | | | | 1 | 1 | | | | | 2 | |
| 28 | | | | 1 | | 2 | | | | 3 | |
| 29 | | | | 1 | 1 | 1 | | | | 3 | |
| 30 | | | | 1 | | 1 | | 1 | | 3 | |
| 31 | | | | 1 | | | 1 | 1 | | 3 | |
| 32 | | | | 1 | | | | | 2 | 3 | |
| 33 | | | | | 1 | 2 | | | | 3 | |
| 34 | | | | | 1 | 1 | 1 | | | 3 | |
| 35 | | | | | 1 | 1 | | 1 | | 3 | |
| 36 | | | | | 1 | | 1 | 1 | | 3 | |
| 37 | | | | | 1 | | | | 2 | 3 | |
| 38 | | | | | | | 4 | | | 4 | |
| 39 | | | | | | | 3 | 1 | | 4 | |
| 40 | | | | | | | 3 | | 1 | 4 | |
| 41 | | | | | | | 2 | 1 | 1 | 4 | |
| 42 | | | | | | | 2 | | 2 | 4 | |
| 43 | | | | | | | 1 | 1 | 2 | 4 | |
| 44 | | | | | | | | 1 | 3 | 4 | |
| 45 | | | | | | | | | 1 | 3 | 4 |
| 46 | | | | | | | | | | 4 | 4 |

Dieser Vorgang kann für die übrigen 25 Services analog durchgeführt werden und resultiert in einer Zielfunktion die linear in den neuen Mengen an binären Variablen ist.

Somit können wir also folgendes definieren:

$$\delta_{jk} = 1, \text{ falls die Lokomotivenkombination } k \text{ auf dem Service } j \text{ eingesetzt wird}$$

$$= 0, \text{ sonst}$$

Num_{ijk} = Anzahl der Lokomotiven des Typs i in der Lokomotivenkombination k auf dem Service j

Der Anteil des totalen Gewichts des Service j , gezogen von einer Lokomotive des Typs i , wenn die Lokomotivenkombination k realisiert wird, wird definiert als

$$Prop_{ijk} = \frac{ML_{ij}}{\sum_i ML_{ij}} \cdot Num_{ijk} \quad \text{if } Num_{ijk} > 0$$

$$= 0 \quad \text{if } Num_{ijk} = 0$$

Die wahren Kosten auf dem Service j bei der Lokomotivenkombination k belaufen sich auf

$$Cost_{jk} = \sum_i d_j [2MC_i$$

$$+ 0.001 FC_i Prop_{ijk} (L_{j1} + L_{j2})] Num_{ijk}$$

Das komplette Modell sieht nun wie folgt aus:

$$\text{Minimise } Z = \sum_{j,k} \text{Cost}_{jk} \delta_{jk} \quad (6)$$

subject to

$$\sum_k \delta_{jk} = 1 \quad \text{for all } j \quad \text{SOS1 constraints} \quad (7)$$

$$X_{ij} = \sum_k \text{Num}_{ijk} \delta_{jk} \quad \text{for all } i \text{ and } j$$

expresses the X_{ij} in terms of the δ_{jk} (8)

$$\sum_j X_{ij} \leq N_i \quad \text{for all } i$$

limits the supply of locomotives of type i (9)

In dieser Form sind nur noch 26 SOS1 constraints und 8 locomotive constraints erforderlich, um das Problem zu formulieren. Die Anzahl der Binärvariablen beträgt 855.

Dieses Optimierungsproblem liefert einen **Zielfunktionswert von 138,622** und sieht den Einsatz von **42 Lokomotiven** vor.

Table 8 The final optimum solution

| Service no. | Number of locomotives allocated | | | | | | | | Total | ML provided | load | n |
|-----------------|---------------------------------|---|---|---|---|---|----|----|-------|-------------|-------|-----|
| | A | G | H | N | P | S | T | X | | | | |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 2 | 1720 | 1200 | 29 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1700 | 1700 | 43 |
| 3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1390 | 1200 | 37 |
| 4 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1600 | 1600 | 39 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1040 | 600 | 10 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1240 | 900 | 12 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 2030 | 1500 | 46 |
| 8 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 | 1270 | 1200 | 29 |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1830 | 1260 | 10 |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1220 | 1000 | 8 |
| 11 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1520 | 1300 | 31 |
| 12 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 2 | 1730 | 1400 | 39 |
| 13 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 970 | 830 | 10 |
| 14 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 2 | 1800 | 1500 | 44 |
| 15 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 1250 | 950 | 23 |
| 16 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 1250 | 1000 | 29 |
| 17 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 640 | 300 | 8 |
| 18 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1350 | 1250 | 31 |
| 19 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1450 | 1100 | 29 |
| 20 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1030 | 1000 | 21 |
| 21 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 1020 | 1000 | 27 |
| 22 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 4 | 3390 | 3000 | 94 |
| 23 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 2 | 1940 | 1600 | 37 |
| 24 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 3 | 2910 | 2600 | 77 |
| 25 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 2 | 2030 | 1600 | 46 |
| 26 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 2 | 2030 | 1600 | 46 |
| Total available | 1 | 6 | 5 | 2 | 1 | 1 | 2 | 24 | 42 | 41350 | 34190 | 855 |
| | 1 | 6 | 5 | 2 | 1 | 6 | 14 | 24 | 59 | | | |

n = number of binary variables required to generate all possible minimal covers.